Jan de Vries.



ACADEMISCH PROEFSCHRIFT.

Jan de Vries

BOLSYSTEMEN.

Gedrukt bij J. de Vries en Zoon.

BOLSYSTEMEN.

ACADEMISCH PROEFSCHRIFT,

TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN

DOCTOR IN DE WIS- EN NATUURKUNDE,

AAN DE UNIVERSITEIT VAN AMSTERDAM,

OP GEZAG VAN DEN RECTOR MAGNIFICUS

MR. C. PIJNACKER HORDIJK,

HOOGLEERAAR IN DE FACULTEIT DER RECHTSGELEERDHEID,

EN

VOLGENS BESLUIT VAN DEN SENAAT DER UNIVERSITEIT,

VOOR DE FACULTEIT TE VERDEDIGEN,

op Saterdag 2 Juli 1881, des namiddags ten 7 ure,

DOOR

Jan de Vries,

GEBOREN TE AMSTERDAM.

TE AMSTERDAM, BIJ

TEN BRINK & DE VRIES.

1881.

AAN MIJNE GELIEFDE OUDERS.

VOORWOORD.

Dit proefschrift heeft zijn ontstaan te danken aan mijne kennismaking met het werkje van Dr. Th. Reije, »Synthetische Geometrie der Kugeln.” *Daar het mij voorkwam, dat de behandeling van dit belangrijke deel der Stereometrie dikwijls aan duidelijkheid te wenschen overliet, besloot ik, eerst voor mijzelf, later met het oog op een proefschrift, de hoofdzaken der theorie te rangschikken en voor te stellen op de wijze, waarop ze m. i. het best toegankelijk werden voor iemand, wien het onderwerp geheel vreemd is. Ik meen te mogen onderstellen, dat het mij gelukt is, een helderder licht te doen vallen op de verschillende bolsystemen en vooral op de merkwaardige cyclide.*

HOOFDSTUK I.

GELIJKVORMIGHEIDSPUNTEN.

Wanneer men uit een punt P lijnen trekt naar een oppervlak φ en deze voerstralen allen in dezelfde verhouding verdeelt, dan zullen die deelpunten een oppervlak φ' vormen, dat met het eerste gelijkvormig is. Men zegt, dat ze gelijkvormig gelegen zijn.

Punten op denzelfden voerstraal noemt men homoloog en strekt die benaming ook uit over de lijnen en vlakken, die homologe punten verbinden. Men ziet licht in, dat homologe lijnen en vlakken evenwijdig zullen zijn. Homologe koorden staan in dezelfde verhouding als de voerstralen.

Stelt men zich voor dat een punt van het eene systeem een vlak doorloopt, dan zal het homologe punt het homologe vlak doorloopen; beweegt het punt zich in twee vlakken tegelijk, dus in hun doorsnede,

dan zal het homologe punt de doorsnede der homologe vlakken beschrijven. De snijlijnen van twee paar homologe vlakken bepalen dus een vlak, dat het gelijkvormigheidspunt P bevat.

Deze eigenschappen gelden ook voor het geval, dat men de voerstralen van φ', uitgaande van P, op hun verlengden afzet. Het oppervlak φ'', dat hierdoor verkregen is, wordt gezegd met φ in tegengesteld gelijkvormige ligging te verkeeren.

Zijn φ en φ' twee bollen, dan is het niet moeielijk te laten zien, dat ze ten opzichte van twee punten gelijkvormig liggen. Met elke grootste koorde van φ moet een grootste koorde van φ' overeenkomen; de uiteinden van evenwijdige middellijnen hebben we dus als homologe punten aan te zien. De lijnen, die deze punten verbinden, ontmoeten elkaar twee aan twee in twee punten, die door de benaming van inwendig en uitwendig gelijkvormigheidspunt onderscheiden worden. Ze bepalen met de middelpunten stukken, die in reden staan als de stralen der bollen, waardoor hun plaats op de centraallijn volkomen is aangewezen.

Het uitwendige gelijkvormigheidspunt U ligt op een lijn met de uiteinden van twee in denzelfden zin evenwijdig getrokken stralen, dus buiten het door de middelpunten begrensde deel der centraallijn. De uiteinden

van twee in tegengestelden zin evenwijdig loopende stralen worden verbonden door lijnen, die elkaar ontmoeten in het inwendig gelijkvormigheidspunt J, ten opzichte waarvan de bollen tegengesteld gelijkvormig liggen.

Wanneer de bollen elkaar uitwendig aanraken, zal het gemeenschappelijk raakpunt het inwendig gelijkvormigheidspunt zijn, terwijl bij een inwendige raking U met het raakpunt samenvalt.

Daar een gemeenschappelijk raakvlak der beide bollen loodrecht staat op de stralen, die naar de raakpunten gaan, zullen deze in denzelfden of tegengestelden zin evenwijdig loopen, naar gelang de bollen aan dezelfde of verschillende zijde van het rakende vlak liggen. De lijn, die de raakpunten verbindt, gaat dus door U of door J; de gemeenschappelijke raakvlakken vormen derhalve twee bundels, die de gelijkvormigheidspunten tot toppen hebben.

Uit de afwezigheid van inwendig gemeenschappelijke raakvlakken bij twee elkaar snijdende bollen mogen we besluiten, dat J dan in het door beide bollen begrensde deel der ruimte ligt.

Raakvlakken in homologe punten zijn natuurlijk evenwijdig, omdat ze loodrecht staan op evenwijdige stralen. Een bovenvermelde eigenschap toepassende, kunnen we dan zeggen: „Twee paar homologe raak-

vlakken van twee bollen snijden elkaar in twee lijnen, die in een vlak liggen met het gelijkvormigheidspunt, ten opzichte waarvan de homologie bestaat."

Drie bollen zullen, twee aan twee beschouwd, drie uitwendige en drie inwendige gelijkvormigheidspunten opleveren, die allen in het centraalvlak liggen. Laten M_1A_1, M_2A_2, M_3A_3 drie stralen voorstellen, die in denzelfden zin evenwijdig loopen, dan gaat, volgens het bovenstaande, A_1A_2 door U_{12}, A_2A_3 door U_{23}, A_3A_1 door U_{31}; het vlak $A_1A_2A_3$ bevat derhalve de drie uitwendige gelijkvormigheidspunten, snijdt het centraalvlak dus volgens een lijn, die U_{12}, U_{23} en U_{31}, vereenigt en de uitwendige gelijkvormigheidsas der drie bollen kan genoemd worden.

Loopt M_1B_1 in tegengestelden zin evenwijdig met M_2B_2 en met M_3B_3, zoodat de beide laatsten gelijk gericht zijn, dan gaat B_1B_2 door J_{12}, B_1B_3 door J_{13}, maar B_2B_3 door U_{23}. Het vlak $B_1B_2B_3$ snijdt het centraalvlak in een zoogenaamde inwendige gelijk-vormigheidsas, die de punten J_{12}, U_{23}, J_{31} bevat. Natuurlijk bepalen ook de punten U_{12}, J_{23}, J_{31}, evenals J_{12}, J_{23}, U_{31}, inwendige gelijkvormigheidsassen.

Elk der zes punten ligt derhalve op twee van de vier assen, zoodat zij de hoekpunten zijn van een volledige vierzijde, waarvan de diagonalen U_{12} J_{12}, U_{23} J_{23}, U_{31} J_{31} twee aan twee door de middelpunten $M_1M_2M_3$ gaan.

In elke van de vier gelijkvormigheidsassen ontmoeten elkaar twee van de aan de drie bollen gemeenschappelijke raakvlakken. Immers een raakvlak, ten opzichte waarvan de bollen aan dezelfde zijde gelegen zijn, moet, blijkens het bovenstaande, door U_{12}, door U_{23} en door U_{31} gaan, en daar door een lijn hoogstens twee raakvlakken aan een bol kunnen gebracht worden, zijn er maar twee, die op deze wijze aanraken. De overige gemeenschappelijke raakvlakken scheiden een der bollen van de overige twee af, zoodat een der raakstralen in tegengestelden zin evenwijdig loopt met de beide andere, en het betrokken raakvlak twee inwendige gelijkvormigheidspunten en een uitwendig punt moet bevatten. De constructie der acht gemeenschappelijke raakvlakken van drie bollen loopt dus daarmede af, dat men door elk van de vier gelijkvormigheidsassen raakvlakken brengt aan een der bollen.

Deze beschouwingen zijn niet van kracht voor het geval, dat de middelpunten der bollen op een lijn liggen, die dan de zes gelijkvormigheidspunten bevat. Er kunnen dan, in het algemeen, geen gemeenschappelijke raakvlakken bestaan. Alleen, wanneer de bollen een gemeenschappelijk gelijkvormigheidspunt bezitten, wordt de derde bol aangeraakt door alle raakvlakken, die door dat punt te gelijk aan de beide andere bollen gebracht kunnen worden.

Wordt een bol M_3 door twee andere, M_1 en M_2, uitwendig aangeraakt, dan zijn de raakpunten de punten J_{13} en J_{23}, die op een lijn moeten liggen met U_{12}. Geschiedt de aanraking voor beiden inwendig, dan zijn U_{13} en U_{23} de raakpunten, en de lijn, die ze verbindt, gaat door U_{12}. Dit leert ons, dat alle paren van punten, waarin twee bollen door verschillende andere bollen gelijksoortig worden aangeraakt, door lijnen vereenigd worden, die elkaar ontmoeten in het uitwendig gelijkvormigheidspunt der beide bollen.

Daar de stralen, naar twee raakpunten getrokken, niet evenwijdig kunnen loopen, zijn het geen homologe punten. Men bestempelt ze met den naam van antihomologe punten. Een lijn, door U_{12} of J_{12} gaande, snijdt de bollen in vier punten, die in twee paar homologe en twee paar antihomologe punten kunnen verdeeld worden.

Bij ongelijksoortige aanraking van twee bollen door een derden is een der raakpunten een uitwendig, het andere inwendig gelijkvormigheidspunt; hun verbindingslijn zal derhalve door het inwendige gelijkvormigheidspunt der beide bollen gaan. Elk paar punten, waarin het gegeven tweetal ongelijksoortig wordt aangeraakt door een derden bol, ligt antihomoloog ten opzichte van J.

Vier bollen bepalen, twee aan twee genomen, twaalf

gelijkvormigheidspunten, die twee aan twee op de zes centraallijnen en zes aan zes in de vier centraalvlakken gelegen zijn. Door de bollen drie en drie te beschouwen, ziet men licht, dat ze buitendien nog drie aan drie verdeeld zijn over vier uitwendige en twaalf inwendige gelijkvormigheidsassen.

Om nog tot een andere merkwaardige betrekking te geraken, stellen we ons eens voor de beide uitwendig gemeenschappelijke raakvlakken v en v′ der bollen M_1, M_2, M_3, die elkaar in de lijn U_{12}, U_{23}, U_{31} snijden, en de beide met v en v′ evenwijdige raakvlakken w en w van den vierden bol M_4, waarvan de tweevlakshoek zijn opening naar denzelfden kant keert als v en v′. Dan zijn v en w, als evenwijdige raakvlakken van M_1 en M_4, homoloog ten opzichte van U_{14}, maar evenzeer homoloog ten opzichte van U_{24} en U_{34}, omdat v tegelijk aan M_1, M_2, M_3 raakt. Ook v en w′ zijn homoloog, ten opzichte van U_{14}, U_{24}, U_{34}. Daar nu $v \| w$ en $v' \| w'$, moet, volgens een boven ontwikkelde eigenschap van gelijkvormige systemen, de doorsnede van w en w met de doorsnede U_{12}, U_{23}, U_{31} van v en v′, een vlak bepalen, dat zoowel door U_{14}, als door U_{24} en U_{34} gaat. Er is dus een vlak, dat de zes uitwendige gelijkvormigheidspunten bevat en dus het uitwendig gelijkvormigheidsvlak der vier bollen kan genoemd worden.

Deze uitkomst hadden we ook kunnen vinden door op te merken, dat deze zes punten drie aan drie op vier gelijkvormigheidsassen gelegen zijn, zooals de figuur aantoont:

```
              U34
            |      |
           U23 — U13
    U12 —   |      |
        —  U24 — U14
```

Daar elk der zes punten tot twee assen behoort, vormen deze een volledige vierzijde, waarvan de punten U de hoekpunten zijn.

Construeert men de vlakken t en t′, die M_4 zoodanig aanraken, dat hun tweevlakshoek gelijk is aan dien van v en v′, maar de opening naar den anderen kant keert, zoo verkrijgt men de paren v, t en v′, t′, die homoloog zijn ten opzichte van de punten J_{14}, J_{24}, J_{34}. Door deze moet dus het vlak gaan, dat de doorsnede van t en t′ bepaalt met de lijn U_{12}, U_{23}, U_{31}, waarin v en v′ elkaar ontmoeten. Hieruit blijkt, dat de inwendige gelijkvormigheidspunten, welke drie der bollen met den vierden bepalen, in een vlak liggen met de uitwendige gelijkvormigheidspunten, die ze met elkander opleveren.

Dit doet ons vier nieuwe gelijkvormigheidsvlakken

kennen, die elk blijkbaar een uitwendige en drie inwendige gelijkvormigheidsassen bevatten, zoodat de door die vier lijnen gevormde volledige vierzijde drie uitwendige en drie inwendige gelijkvormigheidspunten tot hoekpunten heeft.

Beschouwen we ten slotte twee aan de bollen M_1, M_2, M_3 gemeenschappelijke raakvlakken p en p′, die M_1 van M_2 en M_3 afscheiden, en twee daarmede evenwijdige raakvlakken q en q′, die M_4 op dezelfde wijze aanraken als p en p den eersten bol. Dan zijn p en q, evenals p′ en q′ homoloog ten aanzien van U_{14}, maar ook ten opzichte van J_{24} en J_{34}, zoodat de punten J_{12}, J_{13} en U_{23}, die op de doorsnede van p en p′ liggen, met U_{14}, J_{24} en J_{34} door een vlak verbonden zijn, dat de vier assen $J_{12}U_{23}J_{31}$, $J_{12}J_{24}U_{41}$, $J_{13}U_{32}J_{21}$ en $U_{23}J_{34}J_{42}$ bevat. Daar de zes punten U slechts in drie verschillende tweetallen kunnen verdeeld worden, zoodanig, dat elk van beiden tot verschillende paren van bollen behoort, levert deze beschouwing ons drie nieuwe gelijkvormigheidsvlakken, die de vier inwendige gelijkvormigheidspunten, door elk van twee bollen met elk der beide andere bepaald, vereenigen met de twee uitwendige gelijkvormigheidspunten der beide paren.

De beschouwing der raakvlakken van M_4, die dezen bol op dezelfde wijze insluiten, als p en p′ de bollen

M_2 en M_3, brengt ons tot een vlak, dat de punten U_{32}, U_{34}, U_{42} benevens J_{12}, J_{13}, J_{14} bevat, dus tot de eerste soort van inwendige gelijkvormigheidsvlakken behoort.

Alles samenvattende, merken we op, dat zoowel de acht gelijkvormigheidsvlakken, als de vier centraalvlakken, allen een door vier assen gevormde volledige vierzijde bevatten, waarvan de hoekpunten worden ingenomen door zes gelijkvormigheidspunten. Elke uitwendige gelijkvormigheidsas ligt in een centraalvlak, in het uitwendige gelijkvormigheidsvlak en, met drie inwendige assen, in een inwendig gelijkvormigheidsvlak der eerste soort; elke inwendige as behoort, behalve tot een centraalvlak, nog, met twee inwendige assen en een uitwendige as, tot een inwendig gelijkvormigheidsvlak der eerste soort, en, met drie inwendige assen tot een inwendig vlak der tweede soort. De genoemde twaalf vlakken snijden elkaar dus drie aan drie in zestien assen.

Daar elk tweetal bollen met elk der beide andere tot een drietal kan vereenigd worden, waarvan elk gelijkvormigheidspunt op twee assen ligt, en de beide aan het bedoelde paar gemeenschappelijke gelijkvormigheidspunten tot beide drietallen behooren, ziet men gereedelijk in, dat in elk dezer punten vier gelijkvormigheidsassen samenkomen, en wel in een

uitwendig gelijkvormigheidspunt twee uitwendige en twee inwendige assen, in een inwendig gelijkvormigheidspunt vier inwendige assen. En, omdat nu elk tweetal van die assen een der twaalf vlakken bepaalt, zal elk gelijkvormigheidspunt het snijpunt zijn van zes vlakken.

Het besproken samenstel van twaalf punten, zestien lijnen en twaalf vlakken levert een merkwaardig voorbeeld van de dualiteitswet, die in de meetkunde der ruimte van uitgebreide toepassing is. Immers door elk punt gaan vier lijnen en zes vlakken, terwijl elk vlak vier lijnen en zes punten bevat.

Hebben de vier bollen een gemeenschappelijk centraalvlak, dan vallen natuurlijk alle besproken vlakken daarmede samen, maar de eigenschap, dat elk gelijkvormigheidspunt het snijpunt is van vier assen, blijft bestaan; deze geldt dus ook voor de gelijkvormigheidspunten van vier in een vlak gelegen cirkels, wanneer we bedenken dat de punten U en J van twee bollen ook gelijkvormigheidspunten zijn van de groote cirkels, waarin beide gesneden worden door een vlak, dat de middelpunten bevat. We mogen dus in het bizonder zeggen, dat de gelijkvormigheidspunten van drie in een vlak gelegen cirkels de hoekpunten van een volledige vierzijde innemen.

Worden drie bollen door een vierden gelijksoortig

aangeraakt, dan zijn de raakpunten allen inwendige of allen uitwendige gelijkvormigheidspunten, naar gelang de aanraking uitwendig of inwendig geschiedt; het vlak der raakpunten is derhalve een inwendig gelijkvormigheidsvlak der eerste soort of het uitwendige vlak der vier bollen. In beide gevallen gaat het dus door de uitwendige gelijkvormigheidsas der drie bollen.

Wanneer één bol uitwendig, en de andere twee inwendig worden aangeraakt, dan hebben we in de raakpunten een inwendig gelijkvormigheidspunt en twee uitwendige. Daar de laatsten door den vierden bol met twee der andere bepaald worden, zal het vlak der raakpunten een gelijkvormigheidsvlak der eerste soort zijn, en dus een uitwendig gelijkvormigheidspunt en twee inwendige van het drietal bollen bevatten, derhalve door een inwendige as gaan. Wordt daarentegen een bol inwendig aangeraakt, de beide andere uitwendig, dan is het vlak der raakpunten een gelijkvormigheidsvlak der tweede soort, dat nog een uitwendig punt en twee inwendige, bijgevolg een inwendige as der drie bollen bevat. Bij ongelijksoortige aanraking liggen de raakpunten dus met een inwendige gelijkvormigheidsas in een vlak.

Worden de bollen M_1 en M_2 gelijksoortig aangeraakt door M_3 en M_4, dan zijn de raakpunten òf J_{13}, J_{23}, J_{14}, J_{24} (uitwendige raking), òf U_{13}, U_{23}, U_{14}, U_{24},

(inwendige raking), òf J_{13}, J_{23}, U_{14}, U_{24} (wanneer de beide eerste bollen door M_3 uitwendig, door M_4 inwendig worden aangeraakt). Het vlak der raakpunten is nu respectievelijk inwendig vlak der tweede soort, uitwendig vlak, of inwendig vlak der eerste soort. Het gaat in de beide eerste gevallen door U_{12} en U_{34}, in het derde geval door U_{12} en J_{34}. De vier raakpunten vormen dus een vierhoek, waarvan de overstaande zijden elkaar ontmoeten in twee gelijkvormigheidspunten, die elk tot een der bolparen behooren, en ten opzichte waarvan de hoekpunten twee aan twee antihomoloog liggen.

HOOFDSTUK II.

MACHTPUNTEN.

Trekt men door een punt P lijnen naar een boloppervlak, dan is, blijkens een planimetrische stelling, het produkt der afstanden van P tot de snijpunten standvastig; men noemt die constante grootheid de macht *) van P ten opzichte van den bol, of van het boloppervlak in P en rekent haar positief, nul of negatief te zijn, naarmate het punt buiten, op of binnen den bol ligt. Hierin ligt opgesloten de bepaling voor de macht van een cirkel in een punt van zijn vlak, wanneer we de doorsnede van den bol met een vlak door P beschouwen.

Een positieve macht kan uitgedrukt worden door

*) Het begrip "macht" werd het eerst ingevoerd door Gaultier, schoon onder anderen naam. Steiner (Crelle's Journal Bd. 1) gebruikte het eerst het woord macht.

het vierkant van de raaklijn, die uit P naar bol of cirkel gaat, een negatieve macht door het vierkant van den straal des kleinsten cirkels, waarvan het vlak het punt P bevat, resp. door het vierkant der halve kleinste koorde door P, wanneer we aan een cirkel denken.

De bol, die tot straal heeft de raaklijn uit P aan het gegeven boloppervlak, snijdt dit laatste blijkbaar rechthoekig. Bij twee orthogonale bollen is dus de macht van elk middelpunt ten aanzien van den anderen bol gelijk aan het vierkant van zijn eigen straal.

Heeft een bol in een punt P de negatieve macht $-p^2$, dan zal hij den bol, uit P als middelpunt en met p als straal beschreven, volgens een grooten cirkel snijden.

Elk punt der ruimte, waarin twee of meer bollen gelijke macht hebben, noemen we een machtpunt van die oppervlakken. Evenzoo spreken we van machtpunten van twee of meer cirkels in hetzelfde vlak. We zullen nu de meetkundige plaats der machtpunten van twee bollen opsporen.

Bij twee elkaar snijdende bollen voldoet aan die voorwaarde het vlak, dat door hun gemeenschappelijken cirkel gaat. Immers elke lijn van dat vlak, die door twee punten van den cirkel bepaald is, kan

beschouwd worden als snijlijn van beide bollen, zoodat elk punt van die lijn ten opzichte van beide oppervlakken dezelfde macht bezit. Deze macht kan blijkbaar positief, nul of negatief zijn. Evenzeer is de gemeenschappelijke snijlijn van twee in een vlak gelegen cirkels de meetkundige plaats van hun machtpunten. Snijden we nu eens twee cirkels C_1 en C_2 door een derden C_3, dan zullen de gemeenschappelijke snijlijnen S_{13} en S_{23} elkaar ontmoeten in een punt, waarin alle drie cirkels dezelfde macht hebben, dat dus behoort tot de meetkundige plaats der machtpunten van C_1 en C_2. Daar de laatsten blijkbaar in elk ander punt van S_{13} of S_{23} verschillende macht bezitten, wordt de bedoelde meetkundige plaats door elke snijlijn in een punt gesneden, is dus een rechte lijn, die om redenen van symmetrie loodrecht staat op de centraallijn, en machtlijn zal heeten.

Laat men de cirkels C_1 en C_2 met hun machtlijn om de lijn der middelpunten wentelen, dan vinden we twee bollen met hun zoogenaamd machtvlak.

Twee elkaar rakende bollen worden in het raakpunt door hun machtvlak aangeraakt, als volgt uit de opmerking, dat de lijn, die een punt van dat vlak verbindt met het raakpunt, beide bollen aanraakt, zoodat ze in dat punt gelijke macht hebben.

Twee geheel buiten elkaar gelegen bollen worden

door hun machtvlak gescheiden, omdat dit de gemeenschappelijke raaklijnen moet halveeren.

Ligt eindelijk de eene bol geheel binnen den anderen, zoo kan geen van beiden het machtvlak ontmoeten, omdat in zulk een snijpunt slechts een der bollen de macht nul zou hebben.

Omdat de raaklijnen, uit een punt aan twee bollen getrokken, alleen dan evenlang zijn wanneer dit punt in het machtvlak ligt, bevat dat vlak de middelpunten van alle bollen, die het tweetal orthogonaal snijden.

Twee bollen β_1 en β_2 bepalen met een derden β_3 twee machtvlakken, die een doorsnede zullen hebben, wanneer de middelpunten niet op een lijn liggen. In punten van die snijlijn hebben alle drie bollen dezelfde macht, waaruit volgt, dat ze ook tot het machtvlak van β_1 en β_2 behoort. De machtpunten van drie bollen vormen derhalve een machtlijn, die op het centraalvlak loodrecht staat en de doorsnede is van de drie machtvlakken,die ze, twee aan twee genomen, opleveren.

In het bizonder volgt hieruit: Worden twee bollen door een veranderlijken bol gesneden, dan is de meetkundige plaats voor alle doorsneden der vlakken, die de gemeenschappelijke cirkels bevatten, een vlak, n. l. het machtvlak der bollen. Deze eigenschap geeft tegelijk het middel tot constructie van het machtvlak voor twee bollen, die geen punt gemeen hebben.

De machtlijn van drie elkaar snijdende bollen gaat door de beide gemeenschappelijke punten, omdat ze daar de macht nul hebben.

Ze ligt oneindig ver weg, wanneer de middelpunten op een lijn zijn geplaatst.

Terloops kan men bij deze ontwikkeling de opmerking maken, dat drie cirkels van hetzelfde vlak algemeen slechts een machtpunt zullen hebben, het snijpunt van de machtlijnen, die ze twee aan twee opleveren.

Vier willekeurige bollen hebben slechts een machtpunt. Immers in het snijpunt van het machtvlak van β_1 en β_2 met de machtlijn van β_2, β_3, β_4 is de macht ten aanzien van alle vier bollen evengroot. Dat punt moet daarom gelegen zijn op de vier machtlijnen, die de bollen drie aan drie, en de zes machtvlakken, die ze twee aan twee bepalen. Hebben ze in dat punt positieve macht, dan zijn de raaklijnen, daardoor aan de vier bollen getrokken, evenlang, en stralen van den bol, die ze rechthoekig snijdt.

De volgende beschouwing zal ons een verband doen kennen tusschen machtpunten en gelijkvormigheidspunten.

Wanneer twee bollen β_1 en β_2 door den veranderlijken bol γ aangeraakt worden, dan doorloopt de doorsnede der beide gemeenschappelijke raakvlakken (tevens

machtvlakken) het machtvlak van β_1 en β_2. Brengen we derhalve door een lijn l van dat vlak de raakvlakken (l A) en (l B) aan β_1, (l C) en (l D) aan β_2, dan zal men de raakpunten A, B, C, D twee aan twee kunnen verbinden door vier bollen, die tegelijk aan β_1 en β_2 raken. Stel, dat de aanraking met de bollen (AC) en (BD) gelijksoortig, met (AD) en (BC) dus ongelijksoortig is, dan snijden de lijnen AC en BD elkaar in U_{12}, terwijl AD en BC het inwendig gelijkvormigheidspunt van β_1 en β_2 bepalen. De vier raakpunten liggen derhalve in één vlak, en, omdat ze evenver afstaan van de lijn l, ook op een cirkel, kunnen dus door oneindig vele bollen vereenigd worden. Elk van die bollen bepaalt met β_1 en β_2 twee snijvlakken, waarvan de doorsnede een lijn van het machtvlak van β_1 en β_2 is; het snijpunt van AB en CD ligt dus ook in dit machtvlak. Dit snijpunt is nu tevens een gelijkvormigheidspunt der bollen (AC) en (BD), omdat deze door β_1 in A en B, door β_2 in C en D worden aangeraakt.

Het machtvlak van twee bollen is dus een gemeenschappelijk gelijkvormigheidsvlak voor alle bollen, waardoor beiden aangeraakt worden.

HOOFDSTUK III.

SYSTEMEN VAN BOLLEN MET GEMEENSCHAPPELIJKE MACHTVLAKKEN, MACHTLIJNEN, OF MACHTPUNTEN.

Tot nu toe is buiten beschouwing gebleven het geval, dat meer dan twee bollen een gemeenschappelijk machtvlak bezitten. Dit vinden we b.v. bij het samenstel der bollen, die door drie punten bepaald zijn en dus het vlak van hun cirkelvormige doorsnede tot machtvlak hebben. Evenzeer bezitten alle bollen, die *een* vlak in zeker punt aanraken, daarin hun machtpunten. Zulke systemen zullen we *bolgroepen* *) noemen, en weldra aantoonen, dat er ook bolgroepen zijn, waarvan de bollen geen punt gemeen hebben met hun machtvlak, dus ook niet met elkander.

Trekt men uit een punt van het machtvlak eener bolgroep raaklijnen aan de verschillende bollen, dan

*) Ingevoerd door Gaultier, schoon onder een anderen naam. Journal de l'Ecole polytechnique 16me cahier 1813.

moeten die even lang en stralen zijn van een bol, die allen rechthoekig snijdt. Alle deze orthogonale bollen hebben in het middelpunt van elk der bollen der groep gelijke macht, en vormen dus een stelsel, waarvoor de centraallijn der groep gemeenschappelijke machtlijn is. Zulk een systeem van meer dan drie bollen met *een* machtlijn willen we *bolbundel* noemen.

We vinden hier twee onderling orthogonale stelsels, die in het merkwaardige verband staan, dat de centraallijn der bolgroep de machtlijn is van den bolbundel, terwijl het centraalvlak des bundels het machtvlak der groep voorstelt.

Daar bij de door drie punten bepaalde bolgroep alleen de punten van het machtvlak, buiten den gemeenschappelijken cirkel, middelpunten kunnen zijn van orthogonale bollen, zullen de laatste in dit geval geen punt gemeen hebben met hun machtlijn, de centraallijn der bolgroep. Allen worden rechthoekig gesneden door den gemeenschappelijken cirkel der groep; we zullen dezen in het vervolg den orthogonaalcirkel des bundels noemen.

Bestaat een bolgroep uit bollen met een gemeenschappelijk raakvlak, dan vindt men de stralen der orthogonalen door het raakpunt te verbinden met de punten van het raakvlak. In dat raakpunt worden

de bollen van den orthogonalen bundel derhalve aangeraakt door hun machtlijn.

Nu is er voor de bollen van een bundel nog een derde mogelijkheid, n.l. dat ze door hun machtlijn worden gesneden, wat we verwezenlijkt vinden in het samenstel van alle bollen, die door twee punten gaan. Deze worden rechthoekig gesneden door een systeem van bollen, waarvan de middelpunten op de machtlijn liggen, buiten het door de snijpunten der bollen begrensde deel, en waarvoor de punten van het centraalvlak machtpunten zijn. De orthogonalen van dezen bundel vormen dus een bolgroep, die geen punt gemeen heeft met haar machtvlak, en dus uit twee ten opzichte daarvan symmetrisch geplaatste reeksen van bollen bestaat, waarvan elk geheel binnen den naast grooteren ligt.

Er zijn dus drie soorten van bolgroepen en drie soorten van bolbundels; de bolgroep, die haar machtvlak snijdt, is normaal tot een bundel, die met zijn machtlijn geen punt gemeen heeft, en omgekeerd is een bolgroep, waarvan het machtvlak geheel buiten de bollen ligt, orthogonaal op een bolbundel, die zijn machtlijn in twee punten snijdt, terwijl als grensgeval de bolgroep, die door haar machtvlak wordt aangeraakt, rechthoekig staat op een bolbundel, die zijn machtlijn aanraakt.

Daar we systemen hebben leeren kennen van bollen, die door drie punten bepaald waren, en van bollen, die twee punten gemeen hebben, ligt het voor de hand ook de bollen te beschouwen, die door één punt gaan. Omdat ze allen in dat punt de gelijke macht nul hebben, willen we eens nagaan, of we ons ook systemen van bollen kunnen voorstellen, die in één punt positieve macht hebben, en herinneren ons daartoe, dat alle bollen, die een zelfden bol rechthoekig snijden, in het middelpunt van dien bol het vierkant van zijn straal tot macht hebben. In het algemeen zullen we alle bollen, die een gemeenschappelijk machtpunt bezitten, onder den naam van *bolcomplex* samenvatten.

Is de macht van een complex in het machtpunt positief, dan worden, zooals we reeds opmerkten, alle bollen rechthoekig ontmoet door een bol met den wortel der macht tot straal, dien we den *orthogonaal* van den complex zullen noemen.

Heeft de complex de negatieve macht $-m^2$, d. w. z. ligt het machtpunt binnen de bollen, dan moeten de laatste elkaar allen snijden. Want laat een lijn door het machtpunt M twee der bollen in de punten A, B en A′, B′ ontmoeten, en is $MA' > MA$, dan zal, wegens $MA . MB = MA' . MB'$, $MB' < MB$ wezen; die bollen hebben dus punten gemeen.

Alle bollen snijden in dit geval één bol, die uit het middelpunt M met m als straal beschreven wordt, volgens groote cirkels. Dezen bol wensch ik te noemen den *mediaan*, omdat zijn oppervlakte door alle bollen van den complex gehalveerd wordt.

Alle tot een bolcomplex behoorende bollen, die door zeker punt P gaan, zullen een tweede punt P′ gemeen hebben, dat aan P is *toegevoegd* door de betrekking MP. MP′ = macht van den complex. Dit geldt natuurlijk ook voor de cirkels door P, waarin die bollen elkaar snijden.

Twee paar, ten aanzien van M toegevoegde, punten A, A′ en B, B′ kunnen door een cirkel vereenigd worden, omdat de cirkel, waarop A, A′, B liggen, ook door B′ moet gaan. Evenzeer kunnen we door drie paar toegevoegde punten steeds een bol brengen. Door een willekeurigen cirkel gaat dus slechts één bol van den complex, die bepaald is door drie punten des cirkels met hun toegevoegden. Een cirkel, die in het machtpunt de macht van den complex heeft, behoort natuurlijk tot oneindig vele bollen, waarvan hij de gemeene doorsnede is.

De bolcomplex is blijkbaar door vier van zijne bollen bepaald; hun eenigste machtpunt is het machtpunt van het systeem. Ook door twee cirkels, die niet door een bol kunnen vereenigd worden, is de bolcomplex ge-

geven; immers brengen we door elken cirkel twee willekeurige bollen, dan bepaalt dat viertal het machtpunt.

Een complex met positieve macht is natuurlijk reeds door zijn orthogonaal bekend, een complex met negatieve macht door zijn mediaan, die door alle bollen volgens groote cirkels moet gesneden worden, terwijl in het algemeen de kennis van machtpunt en een der bollen voor elken complex voldoende is.

Het ligt voor de hand eens het samenstel van bollen te onderzoeken, die tegelijk tot twee bolcomplexen behooren, dus in twee punten gelijke macht hebben. De lijn, die de beide machtpunten verbindt, is dan blijkbaar de gemeenschappelijke machtlijn der bollen; ze vormen dus een bolbundel. Daar ze in elk punt der machtlijn gelijke macht bezitten, behooren de bollen des bundels tot oneindig vele bolcomplexen. Het centraalvlak des bundels is weer het machtvlak voor de bijbehoorende orthogonale bolgroep, die, zooals men licht inziet, gevormd wordt door de orthogonalen der verschillende bolcomplexen met positieve macht.

Drie bolcomplexen, waarvan de machtpunten niet op een lijn liggen, hebben een samenstel van bollen gemeen, die in het door die drie machtpunten bepaalde vlak een gemeenschappelijk machtvlak bezitten en derhalve een bolgroep vormen, welke deel uitmaakt van oneindig vele bolcomplexen, die in dat vlak hun

machtpunt, en van oneindig vele bolbundels, die daarin hun machtlijn hebben.

In het bizonder vormen dus alle bollen, die twee vaste bollen loodrecht of in groote cirkels snijden, een bolbundel, waarvan de machtlijn de middelpunten der beide bollen verbindt. *) Evenzeer herkennen we in het samenstel van alle bollen, die tot drie gegeven bollen normaal zijn, of drie bollen in groote cirkels ontmoeten, een bolgroep met het centraalvlak van het drietal tot machtvlak.

Letten we nu eens op een bepaalden bol β van een bolcomplex met machtpunt M. Elke bol van den complex zal β ontmoeten in een cirkel, waarvan het vlak door M gaat, omdat hij slechts toegevoegde punten bevat. Alle deze op β gelegen cirkels, die in M gelijke macht hebben, zullen we eens samenvatten met den naam van *cirkelbundel.*

Zulk een cirkelbundel vindt men door een bol te snijden met alle vlakken, die door een vast punt M, het machtpunt des bundels, gebracht kunnen worden.

Ligt M buiten β, zoodat de bijbehoorende complex

*) Natuurlijk zullen ook de bollen, die een bol loodrecht en een anderen volgens groote cirkels snijden, een bolbundel vormen, terwijl we een bolgroep herkennen in het samenstel van alle bollen, die een orthogonaal en twee medianen, of een mediaan en twee orthogonalen hebben.

een orthogonaal heeft, dan zal deze den bol β ontmoeten in een cirkel, die de cirkels des bundels rechthoekig snijdt. Deze orthogonaalcirkel van den bundel bevat de raakpunten van alle uit M aan β getrokken raakvlakken. In het bizonder wordt dus een cirkelbundel gevormd door alle cirkels van een bol, die normaal zijn tot een vasten cirkel op dien bol.

Op een bol β kan een cirkelbundel ook bepaald worden door hem tot doorsnede te brengen met een bolbundel, waarvan hij geen deel uitmaakt. Immers het machtvlak, dat β met een van de bollen des bundels gemeen heeft, snijdt de machtlijn des bundels in een punt, waarin alle bollen gelijke macht hebben, dat dus machtpunt is van een bolcomplex, waartoe ook β behoort. Door dat punt gaan derhalve de vlakken van alle cirkels, waarin β den bolbundel ontmoet.

Twee op één bol β gelegen cirkelbundels zullen een aantal cirkels gemeen hebben, die we willen samenvatten met den naam van *cirkelgroep*. De vlakken van die cirkels moeten door twee vaste punten gaan, snijden elkaar dus in een lijn, de machtlijn van den bolbundel, die deze cirkels op β bepaalt. We noemen haar de machtlijn der cirkelgroep, die we kunnen beschouwen als te behooren tot on-

eindig vele cirkelbundels, waarvan we de machtpunten op die lijn moeten zoeken. Zoo vormen de cirkels van een bol, die twee daaropgelegen vaste cirkels rechthoekig snijden, een cirkelgroep.

Een bol wordt door een bolgroep, die hem niet bevat, in een cirkelgroep gesneden, waarvan de machtlijn de doorsnede is van het machtvlak der bolgroep met het machtvlak, dat de vaste bol met een bol der groep bepaalt.

Deze machtlijn is tevens machtlijn van den bolbundel, die de bolgroep en den vasten bol β bevat, derhalve de centraallijn van een tot den bolbundel normale bolgroep, die door β gesneden wordt in een tweede cirkelgroep, waarvan de cirkels natuurlijk ook normaal zijn tot die der eerste groep.

Heeft de bolbundel een orthogonaalcirkel, die β in twee punten snijdt, dan zijn dat de raakpunten der beide raakvlakken, die door de machtlijn des bundels (en der eerste cirkelgroep) aan β gebracht kunnen worden. Door den orthogonaalcirkel gaan alle bollen der orthogonale bolgroep, dus zijn die twee raakpunten gemeen aan alle cirkels der tweede cirkelgroep, waarvan de machtlijn den bol β derhalve snijdt, en de machtlijn der eerste groep loodrecht kruist.

Bevat een bol twee orthogonale cirkelgroepen dan zullen hun machtlijnen elkaar dus rechthoekig over-

kruisen in dier voege, dat de eene den bol ontmoet in de punten, waarvan de raakvlakken door de andere lijn gaan.

Samenvattende, wat de behandelde bolsystemen merkwaardigs aanbieden, vinden we een bolcomplex bepaald door vier bollen, die niet meer dan een machtpunt bezitten, een bolbundel door drie bollen met een centraalvlak, een bolgroep door twee bollen. In het bizonder vormen de bollen, die een orthogonaal bezitten, een complex; de bollen, die twee andere rechthoekig snijden, een bundel; de bollen, die normaal zijn op drie bollen (met middelpuntsdriehoek), een groep; terwijl het element van alle deze systemen, de bol, bepaald is door vier bollen, die hij orthogonaal moet snijden. Evenzeer worden complex, bundel, groep en bol resp. bepaald door een, twee, drie of vier bollen, die ze volgens groote cirkels moeten snijden.

Onze bolsystemen laten een merkwaardige vergelijking met de rechte lijn, het platte vlak en de ruimte toe, wanneer we den bol als grondvorm met het punt laten overeenkomen.

Waar de lijn gegeven is door twee punten, is de bolgroep bepaald door twee bollen, die het machtvlak doen kennen. Even als een vlak bepaald is door drie punten, die niet op een lijn liggen, is een bolbundel

gegeven door drie bollen, die niet tot een bolgroep behooren. Terwijl vier punten, die niet op een vlak of op een lijn liggen, ons in de ruimte verplaatsen, bepalen vier bollen, zoo ze niet tot een bolbundel of tot een bolgroep kunnen gerekend worden, een bolcomplex.

Gelijk een vlak alle lijnen bevat, die er twee punten mede gemeen hebben, behoort een bolgroep tot elken bolbundel, waarvan ze twee bollen bevat, een bolbundel tot elken bolcomplex, waarmede hij drie (niet in een groep gelegen) bollen gemeen heeft.

Twee lijnen door een punt kunnen door een vlak verbonden worden: twee bolgroepen met een gemeenschappelijken bol door een bolbundel. Evenals twee vlakken een lijn en drie vlakken een punt gemeen hebben, bezitten twee bolcomplexen een bolbundel, drie bolcomplexen een bolgroep, vier bolcomplexen een bol gemeenschappelijk.

HOOFDSTUK IV.

INVERSIE.

De beschouwing van punten, die in een bolcomplex aan elkander toegevoegd worden, brengt ons tot eene wijze van vervorming van figuren, die onder den naam van inversie bekend is. De afgeleide figuur bestaat daarbij uit de punten, die ten opzichte van een centrum door een bepaalde macht toegevoegd werden aan de punten der oorspronkelijke figuur.

Stellen we ons een lijn voor, die om het punt C beweegt, en waarvan het punt P een oppervlak φ volgt; het punt P', bepaald door de betrekking $CP' . CP = m$, beschrijft dan een oppervlak φ', dat men de *inversie* van het eerste noemt, en omgekeerd. Daar de voerstralen der eene figuur evenredig zijn met de reciproke waarden van die der inverse figuur, heet deze vervorming ook wel transformation par rayons vecteurs

réciproques. *) Is de macht van inversie negatief, dan zijn de overeenkomstige punten blijkbaar door het centrum gescheiden.

Bollen en cirkels, die in het centrum de macht m hebben, veranderen niet door deze omvorming. Immers twee punten van zulk een bol, A en A′, die met C op een lijn liggen, zijn verbonden door de betrekking CA. CA′ = m, waaruit volgt, dat A de inversie is van A′ en evenzeer A′ de omkeering van A. Is m positief, dan wordt de bol door een met $\sqrt{m}$ als straal beschreven orthogonaal in punten gesneden, die hun eigen inversies zijn.

Vlakken en lijnen door C veranderen evenmin door deze transformatie.

Laten we ons eens voorstellen, dat een figuur door twee van nul verschillende machten m_1 en m_2 uit hetzelfde centrum C wordt vervormd. Noemen we A_1,B_1 en A_2,B_2 de inversies der punten A,B, dan is

---

*) Dezen naam ontving het beginsel door Liouville. Zie zijn Journal de Mathématiques, T. XII, p. 276. Plücker (Crelle's Journal Bd. XI. S. 219—225) schreef het eerst over dit „neue Uebertragungsprincip," maar paste het in analytischen vorm, en alleen in het vlak, toe. William Thomson (Liouville, Journal T. X p. 364) vestigde er op nieuw de aandacht op door zijn theorie der electrische beelden. Eindelijk vinden we het terug in de Kreisverwandschaft van Möbius. (Berichte der Kgl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften, 1853, S 14—24.)

$CA.CA_1 = CB.CB_1 = m_1$ en $CA.CA_2 = CB.CB_2 = m_2$, waaruit $\frac{CA_1}{CA_2} = \frac{CB_1}{CB_2} = \frac{m_1}{m_2}$. De overeenkomstige voerstralen der beide nieuwe figuren hebben een standvastige verhouding: de figuren zijn dus gelijkvormig en hebben C tot gelijkvormigheidspunt.

Vervormen we nu een bol, die in C de macht m' bezit, met de machten m' en m, dan levert de eerste transformatie natuurlijk den bol zelf op, derhalve moet ook de tweede een bol doen ontstaan, die met den oorspronkelijken ten opzichte van C gelijkvormig ligt. De inversie van een bol is dus in het algemeen weer een bol; de beide figuren hebben in het centrum van omkeering hun in- of uitwendig gelijkvormigheidspunt, naar gelang de macht negatief of positief was.

Bij deze afleiding is het noodzakelijk, te onderstellen, dat m'_1 van nul verschilt, want een bol, die door het centrum van inversie gaat, wordt met de macht nul niet in zich zelf vervormd, daar met het punt C alle punten overeenkomen die oneindig ver weg liggen. De inversie van een bol, die door het centrum gaat, kan dus geen bol wezen.

Om ook in dit geval de omkeering te bepalen, stellen wij door B een willekeurig punt van den bol voor, en noemen het punt, waarin hij voor de tweede

maal gesneden wordt door de middellijn, waarop C ligt, eens A. Dan hebben we CA. CA′ = CB. CB′ of CA : CB = CB′ : CA′, dus △ CAB ∽ △ CB′A′. Daar nu hoek CBA recht is, moet dit ook het geval zijn met hoek CA′B′: de lijn A′B staat loodrecht op CA′. De inversie van onzen bol is dus een vlak, loodrecht op de door het centrum getrokken middellijn, derhalve evenwijdig met het raakvlak in C. Omgekeerd ziet men in, dat een vlak getransformeerd wordt in een bol, die in het centrum van inversie wordt aangeraakt door een vlak evenwijdig met het gegevene.

Twee vlakken maken derhalve denzelfden hoek als de vlakken, die in het centrum hun inversies aanraken, dus als die bollen zelf.

Om na te gaan, of de hoek, waaronder twee willekeurige bollen β_1 en β_2 elkaar ontmoeten, door de omkeering verandert, stellen we ons in een van hun snijpunten P de beide raakvlakken g_1 en g_2 voor. Deze veranderen in twee bollen γ_1 en γ_2, die door C gaan, en daar een hoek vormen gelijk aan dien van g_1 en g_2. In het inverse punt P worden β'_1 en β'_2 door γ_1 en γ_2 aangeraakt, zoodat ze denzelfden hoek insluiten als deze, omdat β'_1, en γ_1, evenals β'_2 en γ_2, een gemeenschappelijk raakvlak in P′ bezitten. De hoek tusschen β_1 en β_2 is dus evengroot als de hoek tusschen hun inversies.

Hetzelfde geldt voor de omkeering van een bol en een vlak, die elkaar snijden. Zoo zal de transformatie van een bol met drie onderling loodrechte middenvlakken, uit een willekeurig centrum, vier onderling orthogonale bollen opleveren.

Daar elke cirkel kan beschouwd worden als de doorsnede van twee overigens willekeurige bollen, zal zijn inversie de cirkel wezen, waarin de omkeeringen van die bollen elkaar ontmoeten.

Een cirkel, waarvan het vlak door C gaat, verandert in de doorsnede van dat vlak met de inversie van een door dien cirkel bepaalden bol.

Op dezelfde wijze ziet men in, dat een cirkel door C in een lijn verandert, n.l. in de doorsnede van zijn vlak met het vlak, dat de inversie is van een willekeurigen door den cirkel gebrachten bol.

Worden twee elkaar snijdende bollen α en β zoodanig geinverteerd, dat α daardoor niet verandert, dan zal β vervormd worden tot een bol β', die α onder denzelfden hoek ontmoet als β. Daar C een gelijkvormigheidspunt van β en β' is, en een paar toegevoegde punten van de beide cirkelvormige doorsneden (β, α) en (β', α) niet op evenwijdige stralen kunnen liggen, zijn zulke punten antihomoloog, zoodat alle paren antihomologe punten ten opzichte van het bijbehoorende gelijkvormigheidspunt gelijke macht heb–

ben. De beide inverse cirkels kunnen we dus ook antihomoloog noemen; hun vlakken snijden elkaar in het machtvlak van β en β', omdat de drie machtvlakken van α, β, β' door een lijn moeten gaan. Drie paar antihomologe punten kunnen dus verbonden worden door een bol, die de gegeven bollen isogonaal snijdt. Terloops volgt nog, dat het kegelvlak dat een punt C met een cirkel c van een bol verbindt, den laatsten nog in een tweeden cirkel c' ontmoet, die de inversie is van c uit C als centrum en met een macht, die den bol in zich zelf transformeert.

Schoon we reeds vroeger hebben aangetoond, dat de punten, waarin twee bollen door een derden worden aangeraakt, antihomoloog liggen ten opzichte van een gelijkvormigheidspunt, merken we op, dat deze eigenschap evenzeer door inversie kan bewezen worden. Wanneer we n. l. twee rakende bollen zoo vervormen, dat de een daardoor onveranderd blijft, dan zal de ander getransformeerd worden in een bol, die met hem ten opzichte van het centrum van inversie gelijkvormig is gelegen; de inverse raakpunten zijn dus antihomologe punten, aangezien ze niet op evenwijdige stralen kunnen liggen. Alle bollen, die twee gegeven bollen aanraken of isogonaal snijden, behooren dus tot twee bolcomplexen, waarvan de

gelijkvormigheidspunten van die twee bollen de machtpunten zijn.

Om de inversie van een bolcomplex met machtpunt M te vinden, beschouwen we eerst de bollen van den complex, die door het centrum van inversie gaan. Zij hebben nog een tweede punt P gemeen, dat door de macht van den complex aan C is toegevoegd, en veranderen in vlakken, die elkaar in P′ snijden. Laat nu A,B een willekeurig paar toegevoegde punten van den bolcomplex voorstellen, dan kunnen we ze met C en P door een cirkel verbinden, waarvan de inversie een lijn door P′ is, die A′ en B′ bevat. Alle bollen, die A en B gemeen hebben worden dus vervormd in bollen, die door A′ en B′ gaan. Evenzeer veranderen de bollen, die een gemeenschappelijken cirkel hebben, in bollen, die bepaald zijn door een cirkel, waarvan het vlak door P′ gaat; dat vlak is n. l. de omkeering van den bol, die den gegeven cirkel met C en P verbindt. Daar twee willekeurige paren toegevoegde punten van den complex door een cirkel kunnen vereenigd worden, zal dit ook gelden voor hun inversies, zoodat het produkt der afstanden van zulk een paar inverse punten tot P standvastig is. De bollen van den complex worden dus getransformeerd in een samenstel van bollen, waarvan de gemeenschappelijke snijvlakken en koorden door

één punt gaan, waarin ze gelijke macht hebben, d. w. z. in een anderen bolcomplex.

Voor een bolcomplex met positieve macht volgt deze eigenschap dadelijk, omdat de inversies der bollen de inversies van den orthogonaal rechthoekig moeten snijden en dus een gelijksoortigen complex vormen. Kiest men in dit geval tot centrum een punt op den orthogonaal, dan vindt men een samenstel van bollen, waarvan de middelpunten in één vlak liggen en waarvoor de macht oneindig groot is; men noemt dit een symmetrischen bolcomplex.

Beschouwen we den bolcomplex met negatieve macht als het samenstel van alle bollen, die hun mediaan volgens groote cirkels snijden, dan vinden we als inversie een dergelijk stelsel. Immers de vlakken van die groote cirkels worden bollen, die twee punten gemeen hebben, n.l. het centrum van inversie en de omkeering van het machtpunt; ze vormen dus een bolbundel, die met de inversie van den mediaan één machtpunt bepaalt. Dit is natuurlijk tevens het machtpunt van de inversies der genoemde groote cirkels, zoodat we weer tot een stelsel van bollen komen, die een bepaalden bol in groote cirkels snijden.

De bolbundel als doorsnede van twee, en de bol-groep als doorsnede van drie bolcomplexen, verande-

ren door inversie in gelijksoortige systemen. Ook hierbij kunnen bizondere systemen te voorschijn komen. Inverteert men een bolbundel, die zijn machtlijn snijdt, om een van die snijpunten, dan komt men tot een vlakkenbundel, d. w. z. tot het samenstel van alle door een punt bepaalde vlakken, terwijl de normale bolgroep in een stelsel concentrische bollen verandert.

Wordt een bolgroep met gemeenschappelijken cirkel uit een punt van die doorsnede vervormd, dan vindt men een vlakkengroep, d. w. z. alle vlakken, bepaald door één lijn, de inversie van dien cirkel.

De bolgroep, die een gemeenschappelijk raakvlak heeft, verandert door inversie uit het raakpunt in een stelsel evenwijdige vlakken.

Wegens hun samenhang met de bolsystemen, zullen nu ook cirkelbundels en cirkelgroepen tot soortgelijke stelsels kunnen vervormd worden. Kiest men echter voor centrum van inversie een punt van den bol, die zulk een cirkelsysteem bevat, dan vindt men cirkelbundels en cirkelgroepen in het platte vlak d. w. z. vlakke stelsels van cirkels met één resp. twee machtpunten.

Men ziet licht in, dat een bol β onder een bepaalden hoek φ wordt gesneden door alle vlakken, die zekeren met β concentrischen bol γ aanraken. Keeren we dit

samenstel om uit een willekeurig punt C met de macht van C ten opzichte van β, zoo vinden we, dat alle bollen door C, die β onder den hoek φ ontmoeten, een tweeden bol γ' aanraken,

De vlakken. die twee bollen β_1 en β_2 onder hoeken φ_1 en φ_2 snijden, raken aan twee met β_1 en β_2 concentrische bollen γ_1 en γ_2, dus ook aan de beide omhullende kegels, die in de gelijkvormigheidspunten van γ_1 en γ_2 hun toppen hebben. Door inversie uit een punt C van het machtvlak van β_1 en β_2 met de macht, welke deze bollen in C hebben, vinden we twee stelsels van bollen door C, die ieder nog een tweede gemeenschappelijk punt hebben, n.l. de inversie van het overeenkomstige gelijkvormigheidspunt, en die allen de inversies van γ_1 en γ_2 aanraken en β_1 en β_2 onder hoeken φ_1 en φ_2 snijden.

Drie bollen worden onder hoeken φ_1, φ_2, φ_3 gesneden door de acht gemeenschappelijke raakvlakken van drie met hen concentrische bollen. De inversie uit een punt der machtlijn geeft acht bollen door C, die de gegeven bollen onder de bepaalde hoeken snijden en bovendien drie bepaalde bollen aanraken. Zij ontmoeten elkaar twee aan twee in vier cirkels, die door één bol kunnen vereenigd worden.

HOOFDSTUK V.

POLARITEIT.

Wanneer twee punten A en A aan elkander toegevoegd zijn door de positieve macht c^2, dan worden ze gescheiden door den orthogonaal met c als straal. Een vlak $\mathcal{L}$, dat in A′ loodrecht staat op CA′, zullen we noemen het *poolvlak* van A ten opzichte van dien bol, en A den *pool* van $\mathcal{L}$. Evenzeer heet het vlak $\mathcal{L}'$, in A loodrecht op CA geplaatst, het poolvlak van A′, A′ de pool van $\mathcal{L}'$. Voor alle punten op den orthogonaal (die met hun toegevoegden samenvallen) is dan het raakvlak tevens poolvlak. Op deze wijze wordt aan elk punt der ruimte als pool een bepaald poolvlak ten opzichte van den bol toegewezen, en aan elk vlak als poolvlak een bepaalde pool.

Laat B een punt zijn van het poolvlak $\mathcal{L}$, dat, volgens bepaling, loodrecht staat op CA, dan is hoek CA B

recht. Maar dan moet ook hoek CBA recht wezen, omdat, wegens CA′ : CB = CB : CA, △CA′B′ ∾ △CBA. Dus is AB ⊥ CB, d. w. z. A ligt in een vlak β', dat in B loodrecht staat op CB, d. i. het poolvlak van B′. Van de beide vlakken α en β', gaat dus elk door den pool van het andere. Men ziet gereedelijk in, dat A niet kan behooren tot het poolvlak van een punt, dat niet op α ligt, zoodat van twee punten der ruimte òf elk van beiden òf geen van beiden gelegen is in het poolvlak van het andere.

Hieruit volgt, dat het poolvlak van een punt, dat α doorloopt, steeds door den pool van α moet gaan, of, anders uitgedrukt, wanneer een punt zich op een vlak beweegt, draait zijn poolvlak om den pool van dat vlak. Draait een vlak tegelijk om twee punten, dan moet zijn pool zich dus in twee vlakken tegelijk bewegen, n.l. in de poolvlakken van die punten. Met de lijn AB komt dus overeen de doorsnede van α en β. Zulke door polariteit afhankelijke lijnen zullen we *wederkeerige poollijnen* noemen Daar CA ⊥ α, en CB ⊥ β, zijn α en β loodrecht op CAB, zoodat hun doorsnede loodrecht staat op AB. Wederkeerige poollijnen kruisen elkaar dus rechthoekig.

Daar toegevoegd punten door den orthogonaal gescheiden zijn, heeft een punt binnen den bol zijn poolvlak daarbuiten; omgekeerd ligt het poolvlak van

een punt buiten den bol gedeeltelijk binnen den bol, en snijdt dien in een cirkel, waarvan de punten op hun eigen poolvlakken liggen. Deze moeten, als poolvlakken van punten in het snijdende vlak, door den pool van dat vlak gaan. Voor een punt buiten den bol is het poolvlak derhalve bepaald als het vlak der aanrakingskromme van den omhullingskegel.

Brengt men door een lijn l twee raakvlakken aan den bol, dan moet, volgens bepaling, de lijn λ, die de raakpunten verbindt, de poollijn van l zijn. De machtlijnen van twee orthogonale cirkelgroepen op den bol zijn dus wederkeerige poollijnen. Raakt l aan den bol, dan wordt λ blijkbaar de raaklijn, die in het raakpunt rechthoekig staat op l.

Dit geeft een middel tot bepaling van het poolvlak van een door den bol ingesloten punt. Men trekke door het punt een koorde waarvan de poollijn wordt gevonden als doorsnede der raakvlakken in de uiteinden der koorde, en brenge door die poollijn een vlak loodrecht op den straal van het gegeven punt. *)

---

*) Kiest men in het vlak van een op den bol gelegen cirkel een punt, dan wordt zijn poolvlak door dat vlak in een lijn gesneden, die de poollijn van dat punt ten opzichte van den cirkel heet. Voor zulke vlakke poolsystemen kunnen overeenkomstige eigenschappen afgeleid worden.

HOOFDSTUK VI.

SYSTEMEN VAN BOLLEN, DIE TWEE OF DRIE GEGEVEN BOLLEN AANRAKEN.

Laat een bol met middelpunt N en straal ρ de bollen β_1 en β_2 met centra M_1 en M_2 en stralen r_1 en r_2 gelijksoortig aanraken, dan hebben we bij uitwendige raking $NM_1 = \rho + r_1$ en $NM_2 = \rho + r_2$, dus $NM_1 - NM_2 = r_1 - r_2$; bij inwendige raking $NM_1 = \rho - r_1$ en $NM_2 = \rho - r_2$, derhalve $NM_2 - NM_1 = r_1 - r_2$. Hieruit volgt, dat de middelpunten van alle bollen, die β_1 en β_2 gelijksoortig aanraken, een tweevlakkige omwentelingshyperboloïde vormen, waarvan M_1 en M_2 de brandpunten zijn, en de as gelijk is aan het verschil der stralen.

Voor ongelijksoortige aanraking tusschen β_1 en β_2 en bol N′ met straal ρ' vindt men $N M_1 - N'M_2 = r_1 + r_2$, of $N M_2 - N'M_1 = r_1 + r_2$.

De meetkundige plaats voor de middelpunten van alle bollen, die twee bepaalde bollen aanraken, bestaat dus uit twee homofocale, tweevlakkige omwentelingshyperboloïden, waarvan de assen resp. gelijk zijn aan het verschil en de som der stralen, en de brandpunten met de middelpunten der bollen samenvallen.

We zullen de bollen β_1 en β_2 met den bol φ, die ze aanraakt, eens inverteeren uit een punt van het door de eersten gevormde machtvlak, zoodat deze bollen door de transformatie niet veranderen, dan wordt de inversie van φ een bol φ', die het tweetal op dezelfde wijze aanraakt in de inversies der raakpunten. Daar het centrum van inversie een gelijkvormigheidspunt van φ en φ' is en we door verandering van centrum telkens nieuwe rakende bollen als omkeeringen van φ verkrijgen, zullen alle aan β_1 en β_2 rakende bollen in het machtvlak van die twee een gemeenschappelijk gelijkvormigheidsvlak hebben.

Tot die bollen behooren ook de gemeenschappelijke raakvlakken van β_1 en β_2, daar we hen een oneindig grooten straal kunnen toekennen. In zulk een vlak verandert een der rakende bollen, wanneer men het centrum van inversie op de doorsnede van den bol met het machtvlak kiest. Daar dit laatste door de transformatie niet verandert, zal het den bol en het raakvlak onder gelijke hoeken snijden. Alle bollen

ontmoeten hun gelijkvormigheidsvlak dus onder dezelfde hoeken.

De hier toegepaste wijze van omkeering leert ons verder, dat het machtvlak van β_1 en β_2 tevens de gelijkvormigheidspunten bevat, die bepaald worden door de bollen, welke deze beiden onder een bepaalden hoek snijden.

Van de bollen, die β_1 en β_2 aanraken of isogonaal snijden, hebben we reeds gevonden, dat ze allen tot twee bolcomplexen behooren, waarvan U_{12} en J_{12} de machtpunten zijn. Hieruit volgt onmiddelijk, dat de bollen, die drie bollen isogonaal of rakende ontmoeten, gelijke macht hebben in drie gelijkvormigheidspunten, dus in de punten eener gelijkvormigheidsas van het drietal; ze behooren derhalve tot vier bolbundels, die elk een der assen tot machtlijn hebben.

Verder volgt, dat de bollen, die tot vier bollen isogonaal of rakende zijn, in acht bolgroepen moeten liggen, waarvan de acht gelijkvormigheidsvlakken machtvlakken zijn. Dan zal, blijkens een voorheen gevonden eigenschap, elk der vier bollen door zulk een bolgroep gesneden worden in een cirkelgroep, waarvan de machtlijn in het bijbehoorende gelijkvormigheidsvlak moet liggen. Deze cirkelgroep wordt bepaald door twee punten, waarin de bol in kwestie wordt aangeraakt door twee bollen der groep, en dus door

de beide raakvlakken, die elkander in de machtlijn der cirkelgroep snijden.

Reeds vroeger is opgemerkt, dat de punten T_1, T_2, T_3 waarin drie bollen $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ door een bol γ worden aangeraakt, in een vlak liggen met een der gelijkvormigheidsassen g der drie bollen, terwijl de raakvlakken in T_1, T_2, T_3 elkaar ontmoeten in het machtpunt P der vier bollen. Daar P de pool is van vlak $T_1T_2T_3$ ten opzichte van γ, zullen alle raakvlakken, die men uit P aan γ kan brengen, in punten van den cirkel $T_1T_2T_3$ aanraken. Alle bollen β, die in punten T van dien cirkel aan γ raken, en hun middelpunt hebben in het centraalvlak van $\beta_1\beta_2\beta_3$, bepalen dus drie aan drie met γ het machtpunt P. De loodlijn l, uit P op dat centraalvlak neergelaten, is derhalve de machtlijn van elk drietal, dus behooren de bollen β allen tot een bolbundel, waarvan l de machtlijn is. Daar voorts alle raakpunten T in een vlak liggen, is de doorsnede van dat vlak met het centraalvlak der bollen, d. i. g, hun gelijkvormigheidsas.

Dat de bollen γ tot een bolbundel behooren, waarvan g de machtlijn is, hebben we reeds vroeger ingezien; hun middelpunten bepalen dus een vlak loodrecht op g. Beschouwen we drie van die bollen γ_1, γ_2, γ_3, die door een bol β_1 worden aangeraakt, dan moet weer het vlak van den aanrakingscirkel door

een gelijkvormigheidsas der bollen γ gaan, terwijl de gemeenschappelijke raakvlakken moeten samenkomen in een punt Q van hun machtlijn g. Maar de bedoelde gelijkvormigheidsas is weer de machtlijn van alle bollen β, die het drietal γ's aanraken, d. w. z. de lijn l.

De beide reeksen van bollen β en γ, waarvan elke β door elke γ wordt aangeraakt, staan dus in de wederkeerige betrekking, dat de machtlijn van elke reeks tevens een gelijkvormigheidsas voor de andere is, terwijl hun centraalvlakken loodrecht op elkander staan, omdat elk van hun een gelijkvormigheidsas bevat, die, als machtlijn der tweede reeks, rechthoekig is op het andere vlak.

De vlakken der cirkels, waarlangs de bollen γ door de bollen β worden aangeraakt, gaan door hun machtlijn, de gelijkvormigheidsas der tweeden. De polen van die vlakken, ten opzichte van de γ's, die ze snijden, liggen, zooals reeds werd opgemerkt, in de machtlijn l der β's; maar dan moet het vlak van den cirkel, waarlangs γ aangeraakt wordt, de poollijn van l ten opzichte van γ bevatten. De poollijn van de machtlijn der β's ten opzichte van elken γ ligt dus in één vlak met den cirkel der raakpunten en de overeenkomstige gelijkvormigheidsas der β's.

Om dus een van de bollen te construeeren, die

aan drie bollen raakt, bepalen we de machtlijn en een gelijkvormigheidsas der bollen, zoeken de poollijnen van die as ten opzichte van elken bol en verbinden die met de machtlijn door drie vlakken, die de gegeven bollen snijden in de cirkels, waarlangs ze aangeraakt worden door de verschillende bollen der reeks, tot welke de gezochte bol behoort. Elk vlak door de gelijkvormigheidsas snijdt dan die cirkels in drie paar punten, die men kan vereenigen door twee bollen, welke aan de vereischten voldoen. *)

De eigenschappen, die we hier ontwikkeld hebben voor de bolreeksen β en γ, komen ook toe aan een merkwaardig oppervlak, dat door Dupin †) ontdekt en *cyclide* genoemd werd. Het kan beschouwd worden als de enveloppe van alle bollen γ, die drie bollen β_1, β_2, β_3 op dezelfde wijze **) aanraken, en bestaat dus uit de cirkels, die elk der bollen γ met den onmiddelijk

---

*) Hieruit volgt deze constructie voor de acht cirkels, die drie in een vlak gelegen cirkels aanraken. Men bepale het machtpunt der drie cirkels en hun vier gelijkvormigheidsassen, zoeke de polen van die assen ten opzichte van elken cirkel en verbinde die met het machtpunt door 12 lijnen; de 24 snijpunten met de cirkels kunnen dan drie aan drie verbonden worden door de acht cirkels, die aan de gestelde eischen voldoen.

†) Dupin, Applications de Géometrie et de Mécanique, Paris 1822.

**) Dit kan op vier verschillende manieren gebeuren. De bol γ kan de β's gelijksoortig aanraken, of zoodanig, dat de raking met een der β's ongelijksoortig is met de aanraking aan elken der beide anderen.

daarop volgenden gemeen heeft, en waarvan de vlakken, zooals we weten, door een gelijkvormigheidsas der β's gaan. Langs deze cirkels wordt de cyclide door de bollen γ aangeraakt, zoodat de opvolgende normalen van het oppervlak in de punten van zulk een cirkel, als stralen van een bol, elkander snijden; die cirkels zijn dus kromtelijnen der cyclide.

Daar nu gebleken is, dat de punten, waarin elke bol β door de bollen γ wordt aangeraakt, op een cirkel liggen, zullen ook tot de cyclide behooren de doorsneden van twee opvolgende bollen der reeks β, die, zooals we boven zagen, allen door γ worden aangeraakt, zoodat we de cyclide tevens als enveloppe der bollen β kunnen beschouwen. De cyclide heeft dus twee reeksen van cirkelvormige kromtelijnen; de vlakken van elke reeks gaan door een lijn, die machtlijn is voor de eene bolreeks, en gelijkvormigheidsas voor de andere. Het oppervlak heeft twee symmetrievlakken, n.l. de centraalvlakken der beide bolreeksen.

Daar drie bollen vier gelijkvormigheidsassen hebben, zullen de bollen, die ze aanraken, omhuld worden door vier cycliden, die een symmetrievlak gemeen hebben. De bollen, welke ze inwendig aanraken hangen samen met de uitwendig rakende door de beide uitwendig gemeenschappelijke raakvlakken, die we als

bollen met oneindig grooten straal kunnen beschouwen, en die de bijbehoorende cyclide aanraken langs twee cirkels. Evenzoo gaan de bollen, die β_1 inwendig, β_2 en β_3 uitwendig aanraken, door de raakvlakken, die β_1 van β_2 en β_3 afscheiden, over in de bollen, die β_1 uitwendig, β_2 en β_3 inwendig raken.

Wanneer de bollen β een orthogonaalcirkel hebben, dan veranderen ze door inversie uit een punt van dien cirkel als centrum in drie bollen, waarvan de middelpunten op een lijn liggen, die tevens hun gelijkvormigheidsas is en de machtlijn voor de bollen, die ze aanraken volgens de cirkels, waarin ze door de centraalvlakken worden gesneden. We kunnen dus alle rakende bollen vinden, door een van hen om de centraallijn te laten wentelen. De cyclide is dan een omwentelingsoppervlak, en, wanneer de wentelende bol geen punt gemeen heeft met de as, de gewone ring of *torus*, die, zooals bekend is, werkelijk twee raakvlakken heeft, loodrecht op de as, die het oppervlak langs een cirkel raken. Naar gelang de wentelende bol een of twee punten met de as gemeen heeft, verkrijgt de omwentelingscyclide een cuspidaalpunt of twee knooppunten. Daar we nu elke omwentelingscyclide door inversie weer kunnen vervormen in de gewone cyclide, zal ook deze in drie hoofdsoorten kunnen verdeeld worden.

Wanneer een cyclide de omhulling is van de bollen, welke drie bollen met gemeenschappelijke koorde aanraken, dan zal de inversie uit een der gemeenschappelijke punten de bollen in drie vlakken veranderen, terwijl de inversie der cyclide het kegelvlak is, dat de aan die vlakken rakende bollen omhult.

Evenzoo vindt men, dat een cyclide, behoorende tot bollen, die hun machtlijn aanraken, door inversie uit het raakpunt in een cylindervlak verandert.

Wordt een cyclide geinverteerd uit een van haar punten, dan gaan de beide onderling rechthoekige kromtelijnen, waarop dat punt ligt, over in twee elkander loodrecht kruisende lijnen, waardoor de vlakken der overige kromtelijnen van de nieuwe cyclide gaan, omdat ze de omkeeringen zijn der bollen, welke die beide met de andere kromtelijnen der cyclide verbinden. Langs deze beide rechte kromtelijnen wordt de afgeleide cyclide aangeraakt door twee vlakken, die niets anders zijn dan de symmetrievlakken, omdat we in die rechte lijnen de beide machtlijnen der cyclide herkennen.

Om de meetkundige plaats voor de middelpunten der kromtelijnen te vinden, dus voor de middelpunten van alle bollen, die drie bollen β_1, β_2, β_3 aanraken, bedenken we, dat deze bollen verdeeld zijn over vier bolbundels, dat dus hun middelpunten in vier be-

paalde vlakken moeten liggen. Nu weten we, dat de overeenkomstige meetkundige plaats voor het geval, dat alleen β_1 en β_2 moeten aangeraakt worden, bestaat uit twee tweevlakkige omwentelingshyperboloïden. Beschouwen we eens de hyperboloïde voor de gelijksoortige raking; ze zal door de overeenkomstige hyperboloïde voor β_2 en β_3 gesneden worden in een kromme, die tevens behoort tot de door β_1 en β_2 bepaalde hyperboloïde.

Deze kromme moet een kegelsnede zijn *), omdat al haar punten liggen in het centraalvlak des bundels, waartoe de gelijksoortig aanrakende bollen behooren; ze is een hyperbool, wanneer de bollen β twee gemeenschappelijke uitwendige raakvlakken bezitten, die, als bollen beschouwd, hun middelpunten in het oneindige hebben. †

Evenzeer vinden we in de centraalvlakken der drie overige bolbundels een kegelsnede voor de middelpunten van bollen, die het gegeven drietal ongelijksoortig aanraken.

De gezochte meetkundige plaats bestaat dus uit

---

*) Dit werd outdekt door Dupuis en door Hachette langs anderen weg bewezen. (Zie „Correspondance sur l'Ecole polytechnique." T. I. p. 19 en en T. II. p. 421.)

†) Bij de omwentelingscyclide is deze kegelsnede blijkbaar een cirkel.

vier kegelsneden, waarvan de vlakken door de machtlijn loodrecht op de vier gelijkvormigheidsassen der drie bollen gaan; elke kegelsnede behoort tot een der vier aan die bollen rakende cyclides.

HOOFDSTUK VII.

FERMAT'S RAAKPROBLEMA.

De eerste, die een oplossing gaf van het vraagstuk, dat voor de ruimte analoog is met het problema van Apollonius, n.l. den bol te construeeren, die vier gegeven bollen aanraakt, was Fermat. Hij onderzocht eerst de bizondere gevallen, waarin een of meer van de vier bollen tot punt of vlak is geworden, en kwam zoodoende tot een zuiver synthetische oplossing.

Het voorgaande hoofdstuk wijst ons de middelen om dit problema terstond in zijn volle algemeenheid op te lossen.

Bepalen we op de vier gegeven bollen vier punten zoodanig, dat een van hen met elk van de drie andere antihomoloog ligt ten aanzien van drie gelijkvormigheidspunten, dan kunnen deze vier punten verbonden worden door een bol, die de gegeven bollen

isogonaal snijdt en dus tot een der acht bolgroepen behoort, en wel tot die groep, waarvan het machtvlak de drie genoemde gelijkvormigheidspunten bevat. Deze isogonale bol bepaalt op de vier bollen vier cirkelvormige doorsneden, waarvan de vlakken het machtvlak ontmoeten in de machtlijnen der cirkelgroepen, waarin de bollen gesneden worden door de bolgroep. Brengen we nu door elke machtlijn de beide raakvlakken aan den bijbehoorenden bol, dan vinden we de raakpunten voor twee bollen, die de gegeven bollen aanraken. Elk der overige zeven gelijkvormigheidsvlakken levert ook twee rakende bollen, zoodat er in het algemeen zestien bollen aan de vereischten voldoen.

Men ziet licht in, dat door elk der zestien middelpunten zes tweevlakkige omwentelingshyperboloïden gaan, die elkaar drie aan drie in vier kegelsneden doordringen.

Een andere constructie voor de zestien rakende bollen volgt uit de beschouwing der bolreeksen β en γ in het vorige hoofdstuk.

Daar vonden we voor een bepaalde wijze van aanraking op den bol β_1 een cirkel, die de raakpunten bevat van alle bollen, welke β_1, β_2 en β_3 aanraken. Bepalen we nu op β_1, een tweeden cirkel, overeenkomende met de bollen, die β_1 β_3 en β_4 aanraken, dan zullen

de snijpunten van die twee cirkels de raakpunten opleveren van twee bollen, die het viertal aanraken.

Om deze cirkels te construeeren, moeten we, ten opzichte van elken bol, de poollijnen zoeken van de drie gelijkvormigheidsassen, die hij met de overige drie bollen, twee aan twee genomen, toelaat. Daar deze drie assen, blijkens vroegere opmerkingen, in een gelijkvormigheidsvlak liggen, zullen de drie bedoelde poollijnen door den pool van dat vlak gaan. De drie cirkels, die de beide raakpunten op elken bol bepalen, liggen elk met een machtlijn en een daarmee evenwijdige poollijn in een vlak ; hun snijpunten dus op een lijn met het machtpunt der bollen en met genoemden pool. Om twee van de zestien bollen te verkrijgen, verbinde men dus het machtpunt der vier bollen met de vier polen van een der acht gelijkvormigheidsvlakken ten opzichte van elk der bollen ; die vier lijnen snijden de bollen in acht punten, die vier aan vier door twee bollen vereenigd kunnen worden.

Volledigheidshalve zullen we ook de veertien bizondere gevallen bespreken, die het problema van Fermat aanbiedt. Daar een punt als bol met oneindig kleinen, een vlak als bol met oneindig grooten straal kan beschouwd worden, kunnen we de vier bollen achtereenvolgens vervangen door ;

1. Drie bollen en een punt.
2. Drie bollen en een vlak.
3. Twee bollen en twee punten.
4. Twee bollen, een punt, een vlak.
5. Twee bollen en twee vlakken.
6. Een bol en drie punten.
7. Een bol, twee punten, een vlak.
8. Een bol, een punt, twee vlakken.
9. Een bol, drie vlakken.
10. Vier punten.
11. Drie punten en een vlak.
12. Twee punten en twee vlakken.
13. Een punt en drie vlakken.
14. Vier vlakken.

Daar een vlak door inversie in een bol kan vervormd worden, kunnen we de gevallen 2, 5, 9 door deze transformatie onmiddelijk tot het algemeene terugbrengen. Dit zou ook gelden voor geval 14, wanneer de acht bollen, die aan de gevraagde voorwaarden voldoen, niet reeds bekend waren als de ingeschreven en aangeschreven bollen van een viervlak. Evenmin zal geval 10 ons ophouden.

Om geval 1 op te lossen, merken we op, dat, door inversie uit het gegeven punt, de gevraagde bollen veranderen in gemeenschappelijke raakvlakken der afgeleide bollen, zoodat de omkeering in tegengestelden

zin ons de acht bollen geeft, die aan de voorwaarden voldoen. In de gevallen 4, 8 en 13 brengt de inversie uit het gegeven punt ons tot dezelfde oplossing, als in geval 1. Daar in geval 8 twee van de bollen (in de inverse figuur) elkaar snijden of raken, vervallen, zooals licht wordt ingezien, vier gemeenschappelijke raakvlakken, zoodat we slechts vier oplossingen vinden. Evenzeer levert geval 13 slechts twee oplossingen, omdat er maar twee raakvlakken mogelijk zijn aan drie elkaar snijdende bollen.

Worden twee bollen en een punt uit een tweede punt geïnverteerd, dan gaan de gezochte bollen over in de raakvlakken door een gegeven punt aan twee gegeven bollen. Het aantal oplossingen wordt onbepaald groot, zoodra dit punt een gelijkvormigheidspunt der bollen is. In het algemeen zullen we, in de inverse figuur, vier zulke raakvlakken vinden, daar van elken der omhullingskegels van de beide bollen twee raakvlakken door het gegeven punt gaan, zoolang het niet binnen of op zulk een kegel ligt, omdat er dan resp. geen of slechts een raakvlak aan het kegelvlak mogelijk is. Deze oplossing geldt, behalve voor het 3de, ook voor het 7de en 12de geval; aan het laatste voldoen echter slechts twee bollen, omdat een van de omhullingskegels verdwijnt.

De bollen, die een bol aanraken en door drie pun-

ten gaan, veranderen door inversie uit een dier punten in de beide raakvlakken, die door twee punten aan een bol kunnen gebracht worden. Deze opmerking leert ons het 6de en 11de geval oplossen.

STELLINGEN.

I.

Het beeld der cyclide is op zich zelf zoo duidelijk, dat Reye's behandeling van dit oppervlak geen bizonderen lof verdient.

II.

Door het invoeren van den mediaan is het beeld van een complex met negatieve macht even duidelijk als dat van een positieve complex.

III.

De inversie der ellipsoïde uit haar middelpunt is de podaire der ellipsoïde.

IV.

De door Reye ingevoerde bollen met imaginairen straal en reëel middelpunt passen niet in de lijst der theorie.

—

V.

Wanneer de orthogonaal van een bolcomplex tevens de mediaan is voor een anderen bolcomplex, dan hebben de beide systemen een vlakkenbundel gemeen.

VI.

Een bolbundel met twee medianen snijdt zijn machtlijn in twee punten, die de medianen van de orthogonalen scheiden.

VII.

Het is wenschelijk om de bolgroepen en bolbundels onafhankelijk van de bolcomplexen te definieeren.

VIII.

Alle bollen der ruimte vormen een systeem met vier afmetingen.

IX.

Het is niet onmogelijk, dat beschouwingen over een ruimte met n afmetingen aanleiding zullen geven tot meetkundige toepassingen.

X.

Wanneer er een vierde afmeting bestond, zouden symmetrische figuren tot dekking gebracht kunnen worden.

XI.

Bij dubbelgekromde lijnen is het wenschelijk, den osculatiecirkel door een osculatieschroeflijn te vervangen.

XII.

De zoogenaamde meetkundige theorie der complexe grootheden bewijst niet het bestaan van zulke vormen.

XIII.

De eenvoudigste oplossing van het raakprobleem van Apollonius berust op de toepassing van kegelsneden.

XIV.

Een uitbreiding van onze kennis der lineaire differentiaalvergelijkingen mag van de theorie van den integreerenden factor verwacht worden.

XV.

De bepaling van den hoek als het verschil in richting van twee lijnen is onjuist.

XVI.

De definitie der rechte lijn als de kortste weg tusschen twee punten is te verwerpen.

XVII.

Niet gepolariseerd licht is in meerder of minder mate heterogeen.

—

XVIII.

Het begrip physische isomerie staat de ontwikkeling der theoretische chemie in den weg.

XIX.

Bij het onderwijs in de beginselen der meetkunde mag men niet zooveel gewicht hechten aan een strenge afleiding uit de grondslagen der wetenschap, dat men boven het bevattingsvermogen der leerlingen gaat.

XX.

Onderwijs in wiskunde moet zoo spoedig mogelijk gesteund worden door het oplossen van vraagstukken.

